ANÁLISIS FRACTAL DE LA RED DE DRENAJE DEL ARROYO FELICIANO (ENTRE RÍOS, ARGENTINA)

Graciela Viviana Zucarelli y Darío Tabernig
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Ciudad Universitaria. Paraje El Pozo. (3000) Santa Fe. Argentina
Tel. (0342) 4575233 (Int. 167)
e-mail: zuca@fich1.unl.edu.ar

RESUMEN

La investigación en una gran diversidad de áreas está adoptando el concepto de la geometría de fractales; que fue establecida por primera vez por Benoit B. Mandelbrot en 1975 y tiene cada vez mayor aplicación en todos los campos del conocimiento. El concepto principal de esta nueva geometría es la dimensión fractal D, que es una propiedad del objeto, la cual indica qué tanto ocupa el espacio que lo contiene y puede adquirir valores continuos en el espacio de los números reales entre 0 y 3. Se presenta en este trabajo la aplicación de métodos para obtener la dimensión fractal del arroyo Feliciano y su red de drenaje. Uno de ellos es el método gráfico de Box-Counting y el otro se basa en ecuaciones empíricas que emplean los parámetros de Horton. Los resultados muestran que el arroyo Feliciano puede ser visto como un objeto fractal, si se comparan con los presentados por diversos autores en la bibliografía consultada.

Palabras Clave: Geometría Fractal, Leyes de Horton, Cuenca Arroyo Feliciano.

ABSTRACT

The investigation in a great diversity of areas is adopting the concept of the fractal geometry; that was established for the first time by Benoit B. Mandelbrot in 1975 and has every time bigger application in all the fields of the knowledge. The main concept of this new geometry is the dimension fractal D that is a property of the object, which how so much squatter indicates the space that contains it and she can acquire continuous values in the space of the real numbers between 0 and 3. This work presents the application of methods to obtain the dimension fractal of the stream Feliciano and their network. One of them is the graphic method of Box-Counting and the other one is based on empiric equations that use the parameters of Horton. The results show that the stream Feliciano can be seen as an object fractal, if they are compared with those presented by diverse authors in the consulted bibliography.

Keywords: Fractal Geometry; Laws of Horton; Feliciano basin.

INTRODUCCIÓN

La investigación en una gran diversidad de áreas está adoptando los conceptos de una nueva geometría, la geometría de fractales (González y Guerrero, 2001). La geometría de fractales fue establecida por primera vez por Benoit B. Mandelbrot en 1975 y está teniendo cada vez mayor aplicación en todos los campos del conocimiento. El concepto principal de esta nueva geometría es la dimensión fractal D, que es una propiedad del objeto, la cual indica qué tanto ocupa el espacio que lo contiene y puede adquirir valores continuos en el espacio de los números reales entre 0 y 3.

El presente trabajo se basa en los conceptos clásicos de la geomorfología y las relaciones de dichos conceptos desde el punto de vista de los fractales. Varios trabajos de la literatura han relacionado las características geométricas de las cuencas de drenaje, tales como las relaciones de Horton, con la dimensión fractal.

Se presenta en esta oportunidad la aplicación de métodos para obtener la dimensión fractal del arroyo Feliciano y su red de drenaje. Uno de ellos es el método gráfico de Box-Counting y el otro se basa en ecuaciones empíricas que emplean los parámetros de Horton. Los resultados muestran que el arroyo Feliciano puede ser visto como un objeto fractal, si se comparan con los presentados por diversos autores en la bibliografía consultada.

MÉTODOS GRÁFICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

Método de Richardson

Se basa en la determinación de la longitud de la red de drenaje a través de un instrumento de medición como un compás o una regla (Naumis, 2002). La longitud de un objeto está dada por L=N.r, donde r es la longitud de la regla y N es el número de reglas necesarias para cubrir el objeto en estudio, cuya expresión es la siguiente:

$$N = L \cdot r^{-1} \tag{1}$$

Para una mayor precisión de la medida del objeto, es ideal que r tienda a 0 (Rodríguez Gomes y Chaudhry, 2000). Siendo D el exponente que describe la propiedad de una forma geométrica irregular, se obtiene una medida de la siguiente forma:

$$L = N \cdot r^{D} = cte \tag{2}$$

donde D > 1. Mandelbrot (1975) llamó a este exponente *dimensión fractal*, lo que permite reescribir la expresión de L de la siguiente manera:

$$L \approx cte \cdot r^{1-D} \tag{3}$$

Método de Box-Counting (conteo por cajas)

La base de este método es la formación de un conjunto de puntos dentro de un espacio euclidiano de dimensión D. Se utiliza una malla de cubos de dimensión D y volumen rD sobre un espacio e, siendo r el lado del cubo. El número de cubos N(r) necesario para cubrir el objeto en estudio está dado por la siguiente ley de potencia:

$$N(r) \approx cte \cdot r^{-D} \tag{4}$$

La ecuación (4) describe una línea recta a través del conjunto de puntos (N,r) ploteados en papel bilogarítmico, de donde se obtiene la dimensión fractal. En la práctica, se utiliza una rejilla de celdas de lado r cubriendo el objeto a analizar. Se contabilizan las N celdas ocupadas por la imagen y se repite la operación para otro tamaño de celda de lado r.

RELACIONES DE HORTON

La red de drenaje formada a partir de un cauce principal, constituye la dinámica de la cuenca. La mayor o menor jerarquización de la red se debe a condiciones de topografía, geología y vegetación. Una de las formas que existe para obtener una medida de la ramificación del cauce principal es a partir del establecimiento del número de orden propuesto por Strahler (Linsley et al., 1977).

Conjunto de Strahler de la cuenca

De la jerarquización de la red, se obtiene la sucesión de números de cursos que, ubicados en orden creciente, forma el “Conjunto de Strahler de la cuenca”.

$$\{N_\Omega\}=\{N_1,N_2,N_3,.......N_{\Omega-1},1\} \tag{5}$$

Las características geomorfológicas asociadas a la dimensión fractal son la Relación de Bifurcación (R_B), la Relación de Longitudes (R_L) y la Relación de Áreas (R_A) de Horton.

Relación de Bifurcación R_B

Es la más importante de todas las formuladas por Horton. Horton expresa que el "número de cauces varía con el orden, en una manera que sugiere una progresión geométrica". En efecto, se trata de una serie geométrica inversa en la cual la relación de bifurcación R_B es la base. La relación R_B constituye un número adimensional muy importante ya que al cuantificar la ramificación de la red, indica la forma del sistema de drenaje. Conceptualmente R_B relaciona el número de cauces N_w con N_{w+1}, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$R_B = \frac{N_w}{N_{w+1}} \tag{6}$$

Siguiendo la metodología propuesta por Strahler, se representa gráficamente la relación entre el número de orden (abscisas aritméticas) y el número de cauces de cada orden (ordenadas logarítmicas). El antilogaritmo del coeficiente de regresión de la recta resultante, es el valor de R_B. Valores bajos de R_B corresponden a cuencas de gradiente suave y forma redonda o cuencas en forma de "pera".

Relación de Longitudes R_L

Se parte de considerar que "la extensión promedio de los cauces de un orden dado, en una cuenca, toma la forma de una serie geométrica directa" y se expresa con la siguiente relación:

$$R_L = \frac{L_w}{L_{w-1}} \tag{7}$$

donde L_w es la longitud promedio de las corrientes de orden w y L_{w-1} es la longitud promedio de las corrientes de orden w-1.

Relación de Áreas R_A

Schumm, según cita Rodríguez Iturbe *et al.* (1980), tomando como base los conceptos establecidos por Horton para el análisis de orden, longitud y pendientes de cursos, caracteriza el área promedio de una cuenca para cada orden como una serie geométrica directa (Peckam y Gupta, 1999). La base de la serie geométrica considerada se denomina relación de áreas medias R_A, y su expresión es la siguiente:

$$R_A = \frac{A_w}{A_{w-1}} \tag{8}$$

donde A_w es el área promedio de las subcuencas de orden w y A_{w-1} es el área promedio de las subcuencas de orden w-1.

Esta ley fue formulada siguiendo los conceptos de Schumm. Se puede expresar que el área promedio de las cuencas de cada orden se aproxima a una serie geométrica directa. En esta serie el primer término es el área promedio de las cuencas de primer orden (Vich, 1996).

De acuerdo a la bibliografía consultada, las cuencas naturales satisfacen los siguientes límites: $3 \leq R_B \leq 5$; $1.5 \leq R_L \leq 3.5$; $3 \leq R_A \leq 6$.

DIMENSIÓN FRACTAL Y RELACIONES DE HORTON

Las relaciones entre las leyes de Horton y la relación fractal están dadas por las siguientes expresiones:

$$R_L = R_A^{d/2} \tag{9}$$

donde d es la dimensión fractal del curso principal. La expresión es válida para $R_L \leq R_A$.

$$R_B = R_L^{D/d} \tag{10}$$

donde D es la dimensión fractal de la red de drenaje, es decir, de la totalidad de los cursos de la red de drenaje y la expresión se aplica para $R_B \geq R_L$. Combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene la expresión que relaciona R_B con R_A:

$$R_B = R_A^{D/2} \tag{11}$$

válida para $R_A \geq R_B \geq R_L$.

Por lo tanto, es posible obtener las siguientes ecuaciones para la determinación de la dimensión fractal (Marani *et al.* 1991):

$$d = 2\frac{\log R_L}{\log R_A} \tag{12}$$

$$D = 2\frac{\log R_B}{\log R_A} \tag{13}$$

Según cita Rosso *et al.* (1991), Feder encontró la siguiente relación, que no proveé estimaciones satisfactorias de d en todos los casos:

$$d = 2\frac{\log R_L}{\log R_B} \tag{14}$$

CUENCA DEL ARROYO FELICIANO

El rasgo superficial más importante de la provincia de Entre Ríos es su rica red hidrográfica generada por la acción del clima interactuando con el sustrato y el relieve. Dentro de los cursos que drenan hacia el Paraná se observan, en dirección NE-SO, el río Guayquiraró y el arroyo Feliciano.

La cuenca del arroyo Feliciano posee un área de 5488 km^2 y está ubicada al NO de la provincia de Entre Ríos entre los meridianos de 30° 15´ y 31° 15´ de latitud Sur y entre los paralelos de 58° 40´ y 59° 15´ de longitud Oeste. La provincia se inscribe dentro del área de transición de los climas subtropicales a templados; las precipitaciones medias oscilan entre los 900 y 1000 mm anuales.

El arroyo corre por una llanura aluvial de contornos irregulares, presentando un ancho variable entre 40 y 120 m y una longitud de 157 km hasta la sección de control en Paso Medina, con una pendiente media de 0.000256. Los suelos son fuertemente arcillosos de baja permeabilidad, con cobertura vegetal originaria de monte bajo cerrado, que ha sido desmontado y utilizado para cultivo y/o pastura natural. Existen registros hidrométricos del arroyo Feliciano en Paso Medina, desde enero de 1975 hasta la fecha. El caudal medio de la serie es de 52.93 m^3/s, con un máximo de 2253 m^3/s en 1998 (EVARSA, 2002).

La Figura 1 muestra la ubicación de la cuenca del arroyo Feliciano en la provincia de Entre Ríos.

A partir de un detallado análisis de la dinámica hídrica superficial efectuado sobre las cartas del Instituto Geográfico Militar (I.G.M. escala 1:100000) y de fotografías aéreas se realizó el trazado de la red de drenaje que se observa en la Figura 2 y se obtuvieron las relaciones de Horton.

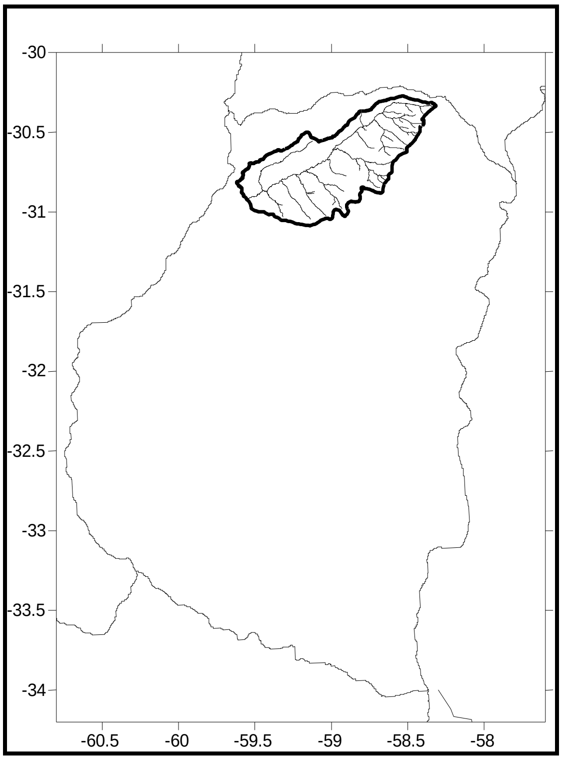

Figura 1. Ubicación de la cuenca del arroyo Feliciano en la provincia de Entre Ríos.

APLICACIÓN Y RESULTADOS

Determinación de las relaciones de Horton

La tarea realizada para el cálculo de los parámetros geomorfológicos demanda muchas horas de trabajo, tanto para preparar la información como para realizar las mediciones sobre el mapa base.

Los parámetros geomorfológicos que se evaluaron en este trabajo son Ω, N_Ω, R_A, R_B, R_L, A_w, L_w y N_w, que se relacionan con la dimensión fractal de la red de drenaje.

Si bien el procedimiento para evaluarlos es bastante sencillo, la aplicación práctica genera diferentes posibilidades, ya sea por el trazado de la red de drenaje (en función de la escala y detalle del mapa base utilizado), como por el juicio subjetivo del hidrólogo. Se necesita entonces, obtener el orden de la cuenca.

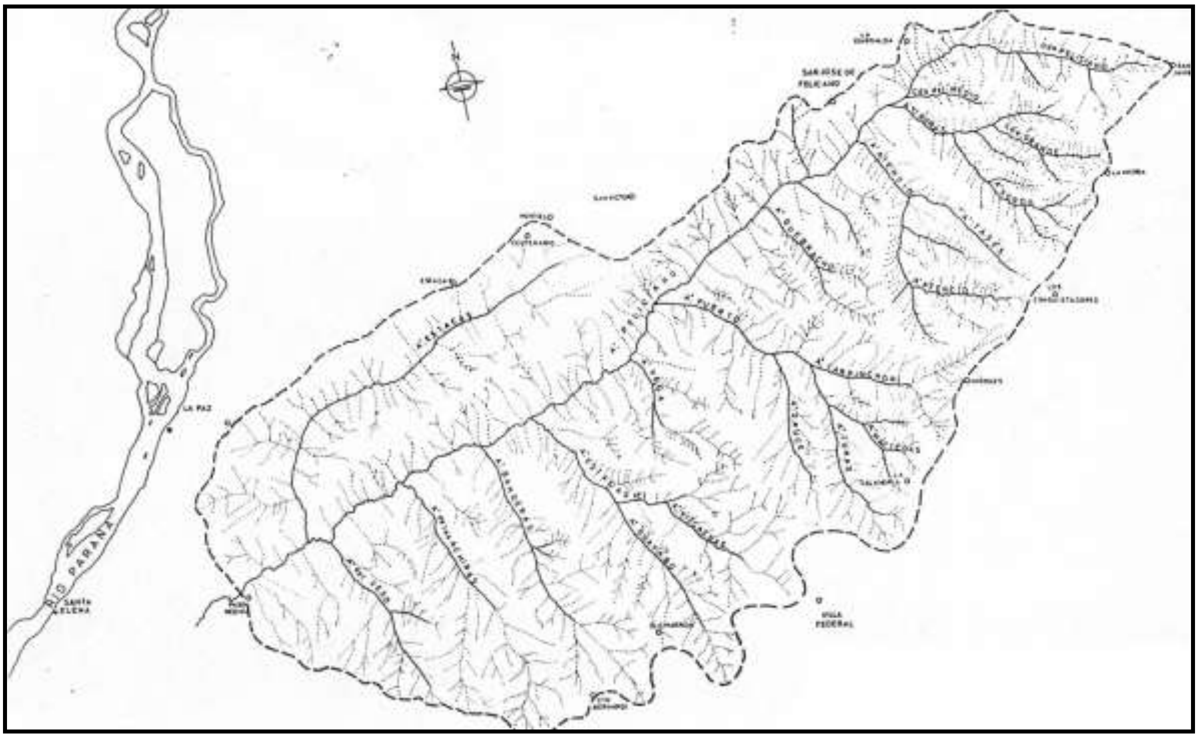

Figura 2. Red de drenaje del arroyo Feliciano.

Posteriormente se cuenta el número de cursos de cada orden N_w, se obtiene el conjunto de Strahler $\{N_\Omega\}$, se miden las longitudes y las áreas de aporte a cada curso. Se promedian las longitudes L_w y las áreas A_w para cada orden. Se calcula luego R_B, R_L y R_A.

Para la aplicación de las leyes de Horton y el cálculo de los parámetros morfométricos complementarios, se hicieron estudios en base a la información disponible (Zucarelli y Morresi, 2000).

En el nivel natural el arroyo Feliciano se estudió con un completo detalle su red de drenaje obtenido en base a planchetas I.G.M. y a fotografías aéreas. El conjunto de Strahler obtenido para este nivel de análisis es:

$$\{N_\Omega\}=\{3054,680,130,24,7,2,1\} \quad (15)$$

La Tabla 1 presenta el orden de los cursos de agua, el número total de cursos, la longitud promedio de los cursos de agua y las áreas promedio para cada orden.

Tabla 1. Orden, cantidad, longitud y áreas de cursos.

Orden (w)	N_w	L_w	A_w
1	3054	1.36	1.10
2	680	2.21	5.01
3	130	4.23	23.47
4	24	13.79	136.72
5	7	13.50	41.65
6	2	32.50	1180.67
7	1	62.00	5488.10

La Tabla 2 presenta los resultados de las Leyes de Horton en la cuenca del arroyo Feliciano.

Tabla 2. Leyes de Horton.

Orden	R_B	R_L	R_A	R_B/R_A
Natural	3.98	1.89	4.07	0.98

Las Figuras 3, 4 y 5 presentan las relaciones entre el número, la longitud y las áreas de los cursos y el orden; respectivamente.

Se observa que los parámetros de Horton para la cuenca en estudio se encuentran en el rango de valores citados en la bibliografía.

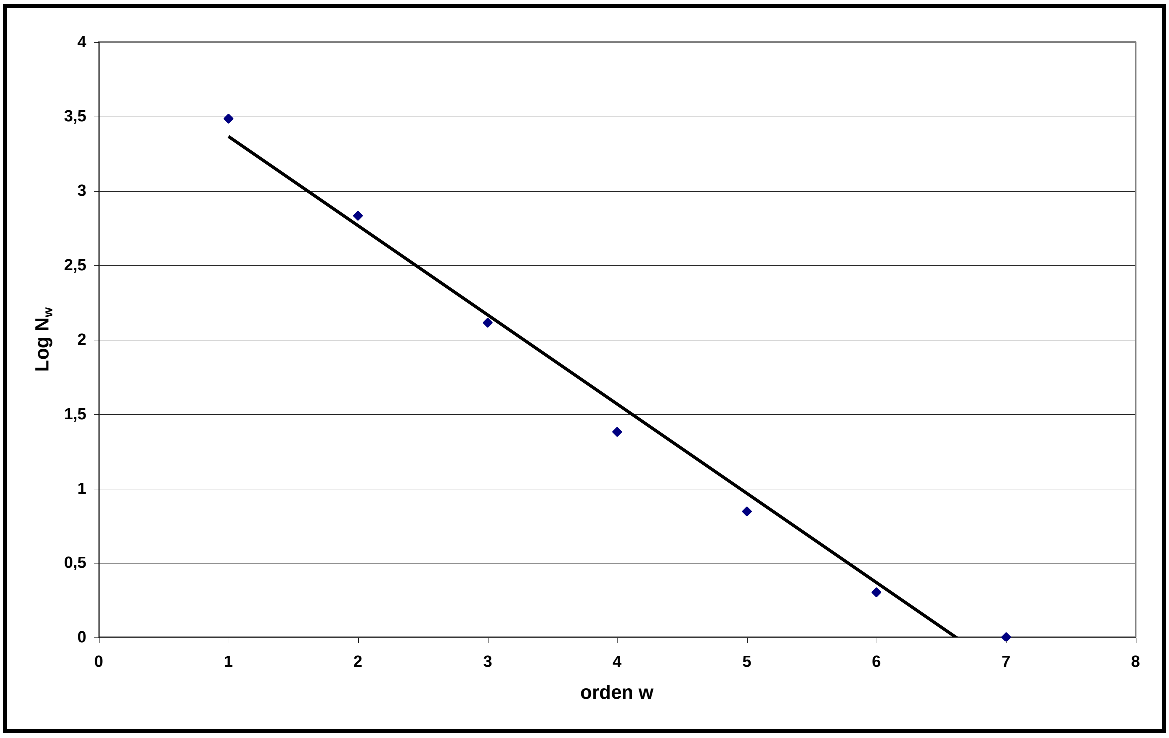

Figura 3. Relación entre el número de cursos y el orden.

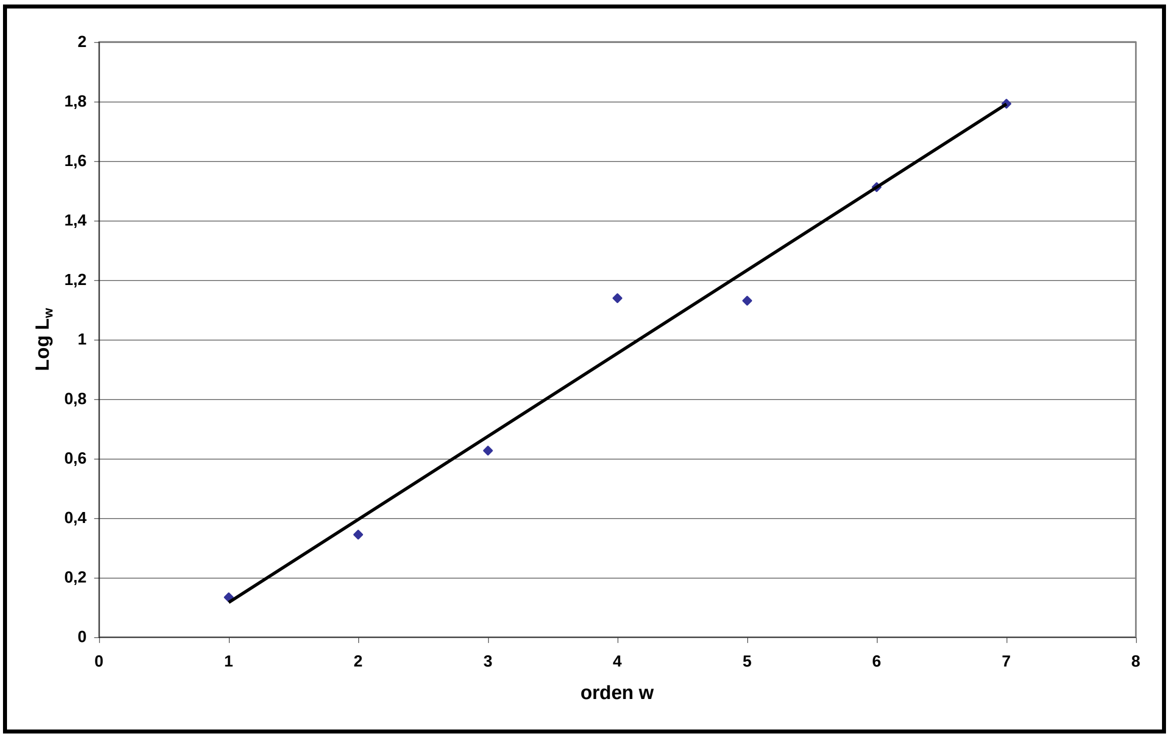

Figura 4. Relación entre la longitud de los cursos y el orden.

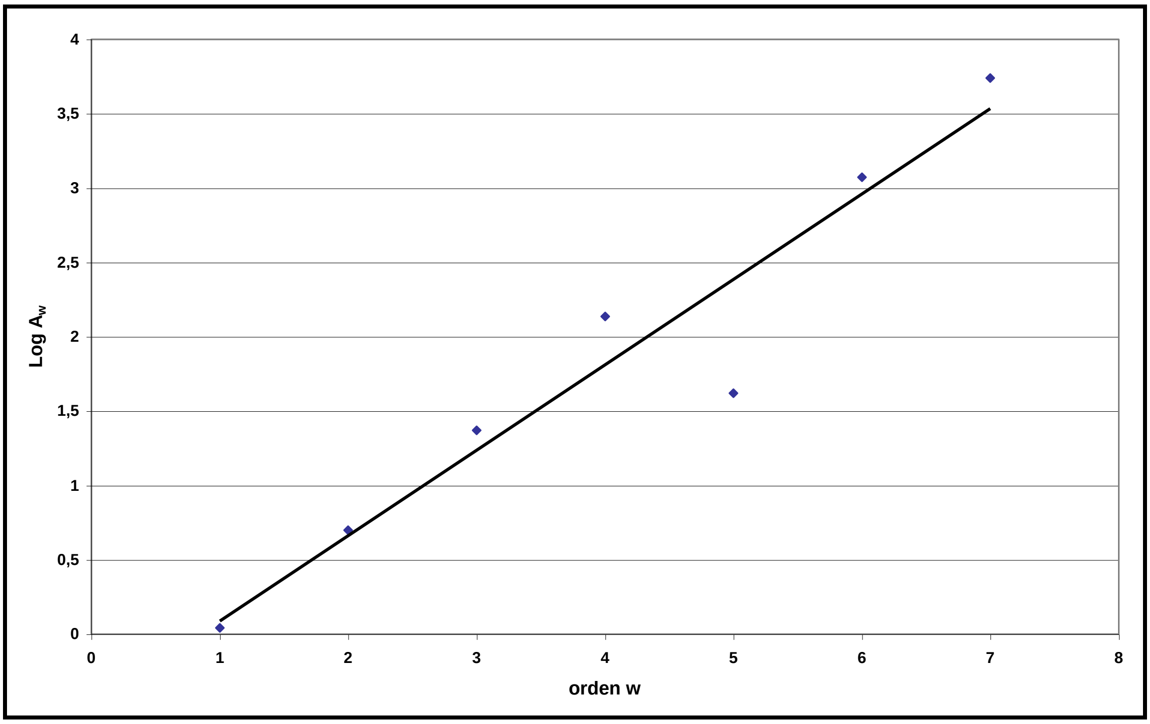

Figura 5. Relación entre el área de los cursos y el orden.

Determinación de la dimensión fractal

Las Figuras 6 a 10 presentan la aplicación del método gráfico de Box-Counting, donde los ejes corresponden a N(r). En ellas es posible observar el perfil longitudinal del arroyo Feliciano sobre una grilla compuesta por N(r) cajas de lado r. Si se cuentan las cajas donde hay algún punto perteneciente al curso principal, se obtiene el valor r. En cada caso se cuentan las cajas donde hay algún elemento perteneciente al curso principal y se establece la relación N(r)-r.

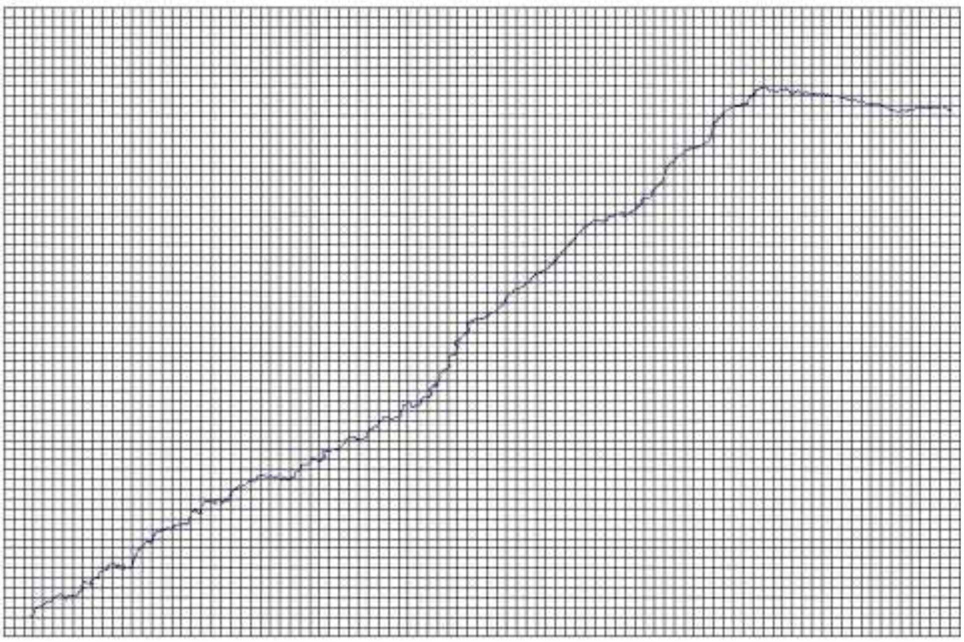

Figura 6. Método de Box-Counting. 4830 cajas.

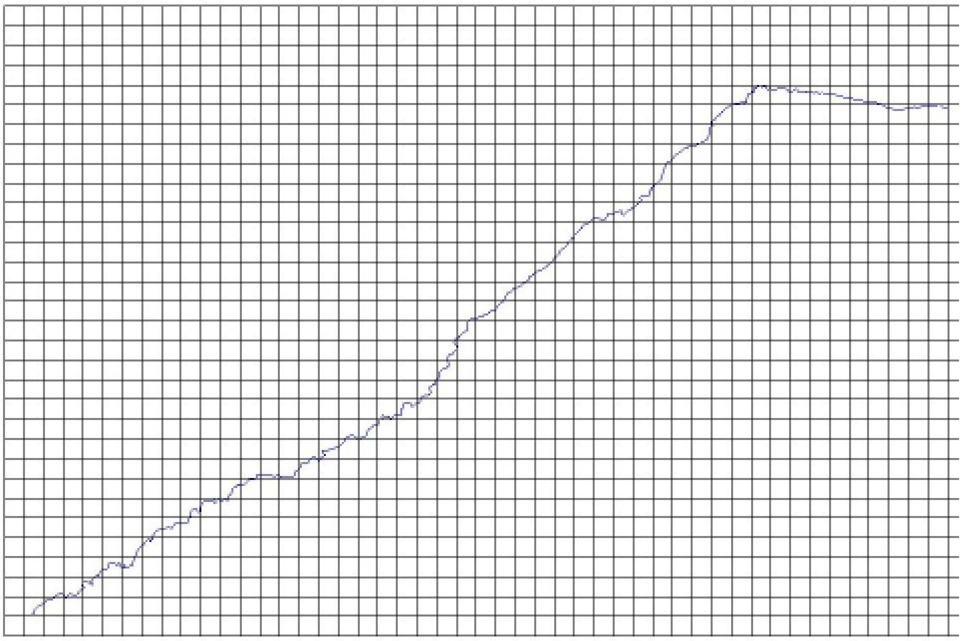

Figura 7. Método de Box-Counting. 1568 cajas.

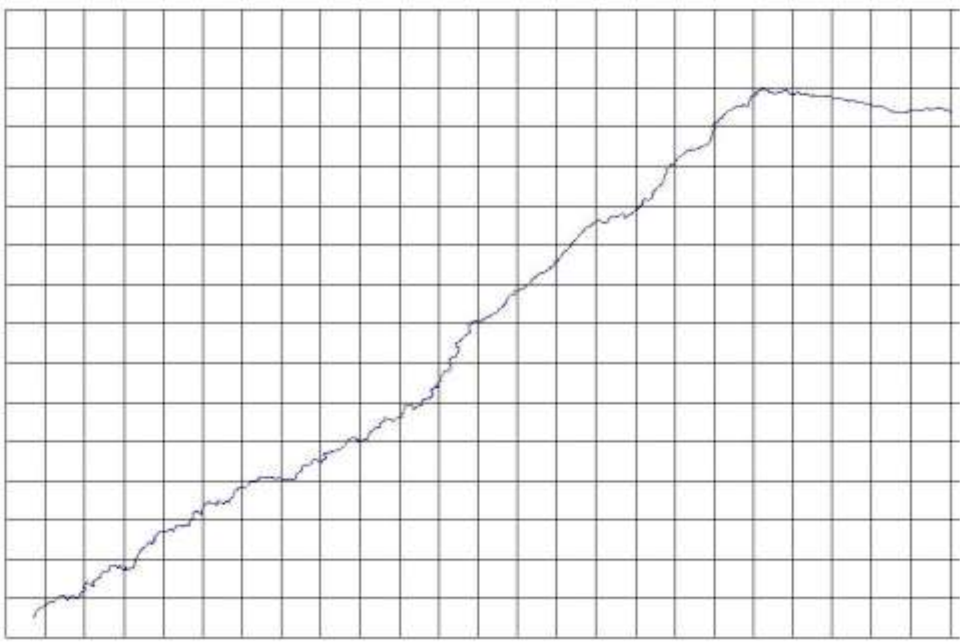

Figura 8. Método de Box-Counting. 324 cajas.

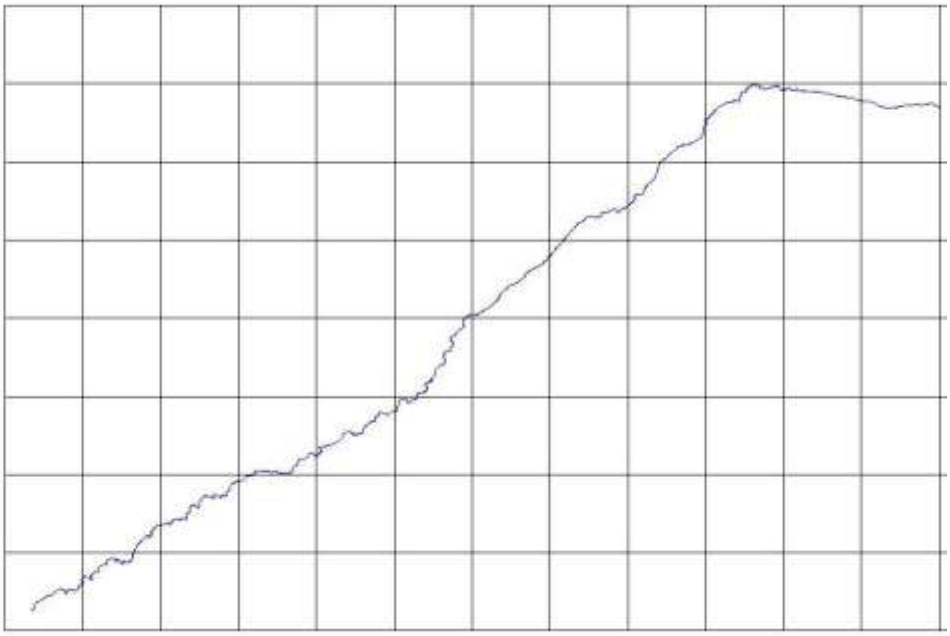

Figura 9. Método de Box-Counting. 96 cajas.

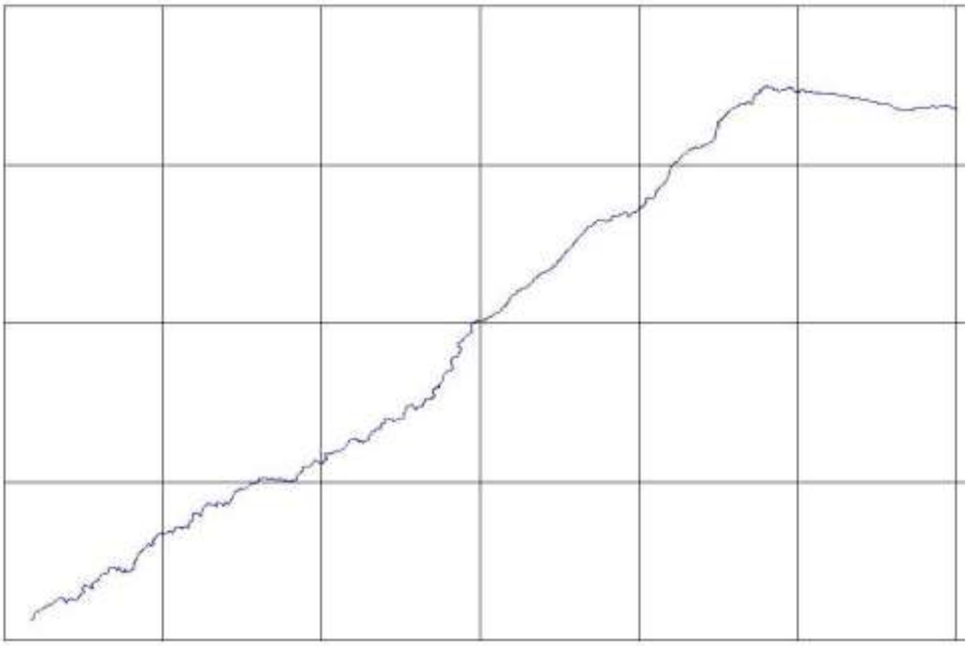

Figura 10. Método de Box-Counting. 24 cajas.

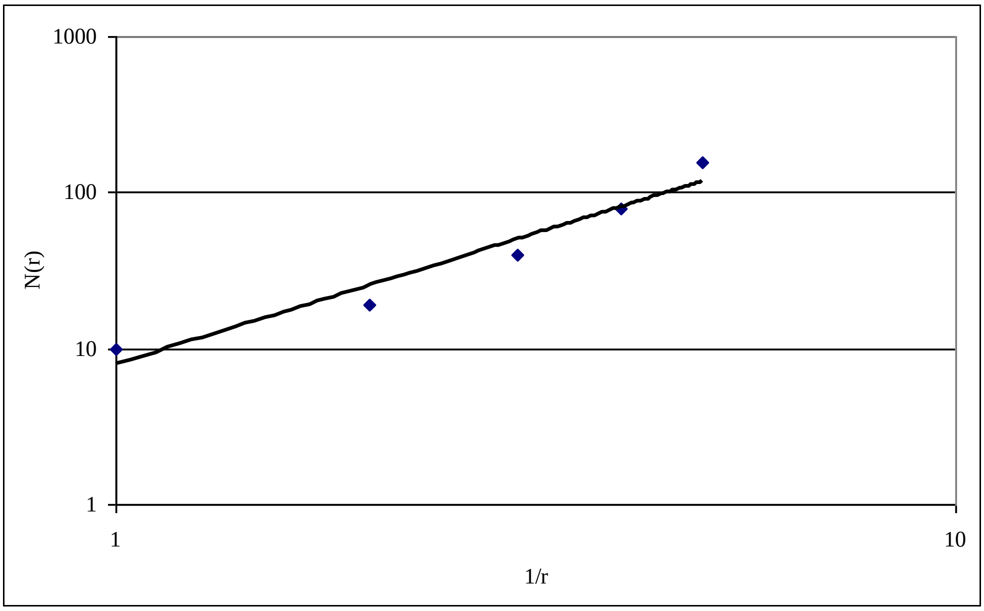

Figura 11. Relación N(r) vs. 1/r

La Figura 11 representa en el eje de las abscisas el logaritmo de la inversa del tamaño de lado de las cajas (log 1/r) y el eje de ordenadas representa el logaritmo del número de cajas no vacías (log r). Se observa que los puntos se ajustan a una curva de pendiente positiva de expresión 7.90 $(1/r)^{1.67}$; con un coeficiente de determinación de 0.96.

Por su parte, la Tabla 3 presenta los valores de las relaciones de Horton y la dimensión fractal de cinco cuencas de Italia, empleando la ecuación (12) y el método de Box-Counting (Rosso *et al.*, 1991).

La Tabla 4 presenta los valores de d obtenidos por la ecuación (12) para ocho cuencas en Missouri y son comparados por los obtenidos mediante el método de Richardson. Finalmente, se calcula d por la ecuación (14), propuesta por Feder (Rosso *et al.*, 1991). Por su parte, la Tabla 5 presenta la aplicación a la cuenca del arroyo Feliciano.

Tabla 3. Dimensión fractal de ríos de Italia.

Río	Área (km^2)	R_B	R_L	R_A	d (ec. 12)	d Box-Counting
Gallina	1.10	3.04	2.03	3.92	1.04	1.03 ± 0.01
Ilice	4.70	2.70	2.00	5.10	1.00	1.01± 0.03
Maroggia	35.80	3.51	2.02	4.07	1.12	1.10± 0.02
Petrace	410.0	4.10	2.10	4.50	1.00	0.99± 0.03
Arno	8229.0	4.70	2.50	5.20	1.11	1.08± 0.04

Tabla 4. Dimensión fractal de ríos de Missouri.

Río	Orden	Área (km^2)	R_B	R_L	R_A	d Richardson	d (ec.12)	d (ec.14)
Big	4	2448	3.24	2.52	4.60	1.214	1.212	1.572
Big Piney	3	1950	4.25	3.01	6.32	1.078	1.196	1.523
Blackwater	4	3919	3.31	1.85	4.20	1.036	1.000	1.028
Bourbeuse	3	2233	4.12	3.34	6.47	1.291	1.292	1.704
Gasconade	4	9104	4.18	3.11	5.83	1.155	1.287	1.587
Lamine	4	2893	2.98	1.90	4.08	1.145	1.000	1.176
Meramec	5	10321	3.19	2.18	4.08	1.137	1.108	1.334
Moreau	3	1510	3.46	2.98	5.58	1.211	1.270	1.759

Tabla 5. Dimensión fractal del arroyo Feliciano.

Arroyo	Área (km^2)	R_B	R_L	R_A	d (ec. 12)	d (ec. 14)	d Box-Counting	D (ec. 13)
Feliciano	5488	3.98	1.89	4.07	0.901	0.921	1.67	1.96

Los valores de D obtenidos a partir de la ecuación (13) para los ríos de Missouri presentan un rango entre 1.444 y 1.649; con un valor medio de 1.576. Los datos informados para las cuencas de Italia presentan valores entre 0 y 1.16. Finalmente, un valor de d=1.67 fue reportado por Gregory y Walling, según citan Rosso *et al.* (1991).

El valor de d encontrado para la cuenca del arroyo Feliciano resulta coherente con los presentados en la Figura 12, donde se muestra el histograma de la dimensión fractal para 30 ríos en el mundo. En dicha figura, es posible observar que el rango más frecuente se encuentra entre 1.70 y 1.80.

La dimensión fractal D fue estimada como 2 por La Barbera y Rosso (1989) como un intento inicial para entender el concepto de fractal en la red de drenaje. Los autores verificaron que las restricciones topográficas, geológicas e hidrológicas pueden reducir la fractalidad de las redes. Una red de drenaje con características de ramificación en todo el espacio tiene dimensión fractal igual a 2.

Según cita Rosso *et al.* (1991), Richardson propuso valores de D para diferentes costas: D=1.25 para el Oeste de Gran Bretaña, 1.15 para la frontera de Alemania, 1.14 para la frontera de Portugal, 1.13 para la costa australiana, 1.02 para la costa de Sudáfrica; una de las más suaves del mundo.

Valores de D cercanos a 1.5 son esperables en costas muy rugosas, mientras que D tiende a 1 para costas poco accidentadas. El valor de D describe una característica muy importante de la costa, que es su rugosidad.

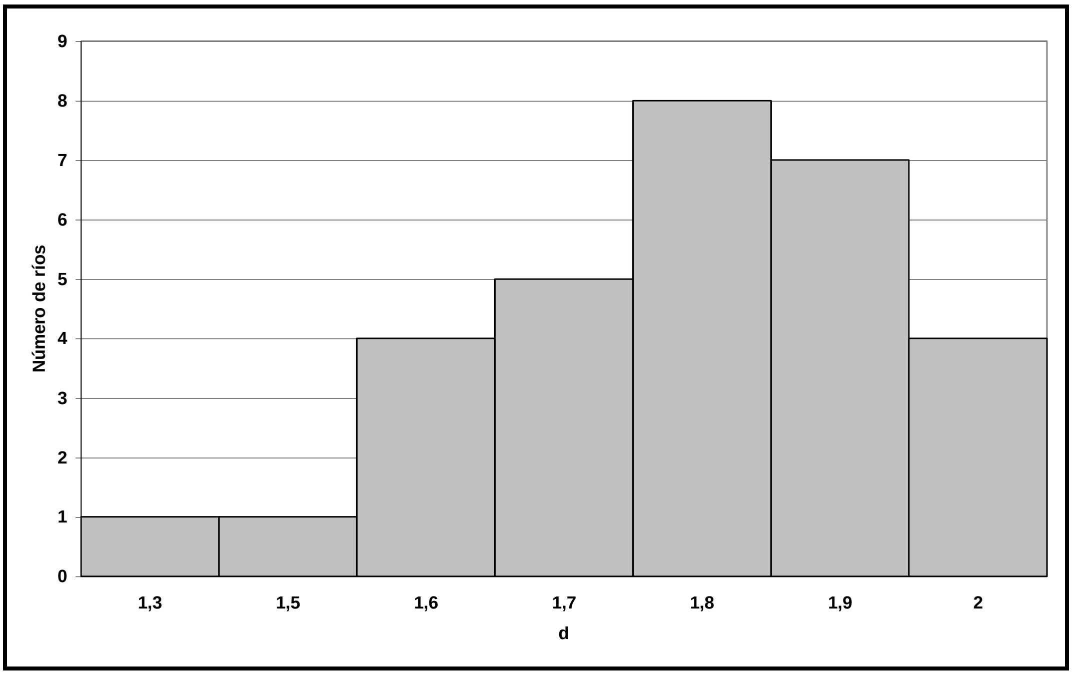

Figura 12. Histograma de la dimensión fractal para 30 ríos en el mundo (Rosso *et al*, 1991).

CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta la aplicación de la geometría fractal y su relación con los parámetros de Horton en la cuenca del arroyo Feliciano. Se utilizan ecuaciones para hallar la dimensión fractal del curso principal obteniéndose un valor cercano a 1. La aplicación del método gráfico de Box-Counting revela que el valor de la dimensión fractal es 1.67, lo que corresponde a un patrón de ramificación que cubre toda el área de drenaje.

Si se comparan los resultados de la dimensión fractal para la red de drenaje completa de la cuenca del arroyo Feliciano con los presentados por diversos autores se desprende que la red en estudio puede ser vista como un objeto fractal, con un valor cercano a 2.

Con respecto a la determinación de las relaciones de Horton, es importante destacar que son sensibles a la escala del mapa empleado, por lo tanto; para su determinación, se deberá contar con información adecuada, tanto de imágenes satelitarias, mosaicos y fotografías aéreas, además de las cartas del Instituto Geográfico Nacional. Los valores de las relaciones de Horton para la cuenca del arroyo Feliciano se encuentran entre los límites establecidos en la literatura, con R_B = 3.98, R_L = 1.89 y R_A = 4.07.

Es necesario, en lo posible; poseer información actualizada, a efectos de considerar las modificaciones que pueden haberse producido en la cuenca.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que diferentes investigadores pueden asignar distintos órdenes a una misma cuenca, dado que esto depende de la subjetividad del hidrólogo.

Finalmente, no debe olvidarse que la cuenca como unidad morfológica debe ser analizada por sus características topográficas, geológica, de vegetación, etc. El sistema en estudio es demasiado complejo como para ser simplificado mediante unos pocos parámetros.

BIBLIOGRAFÍA

EVARSA. 2002. "Estadística Hidrológica". Presidencia de la Nación. Secretaria de Recursos Naturales y Desarrollo Sustentable.

González G. V. A. y Guerrero C. 2001. "Fractales: fundamentos y aplicaciones". Revista Ingeniería, Enero-Marzo 2001. Vol. IV, N° 10. pp. 53-59.

La Barbera P. y Rosso R. 1989. "On the fractal dimension of stream networks". Water Resources Research, Vol. 25, Nro. 4, pp. 7345-741.

Linsley R., Kholer M. y Paulus J. 1977. "Hidrología para ingenieros". Bogotá, McGraw-Hill Latinoamericana.

Mandelbrot B. 1975. "Los objetos fractales". Tusquets editores, Barcelona, pp. 75.

Marani A., Rigon R. y Rinaldo A. 1991. "A note on fractal channel networks". Water Resources Research, Vol. 27, Nro. 12, pp 3041-3049.

Naumis G. G. 2002. "Los fractales: una nueva geometría para describir el espacio geográfico". Simposio La reurbanización de la Ciudad de México.

Peckham S. D. y GUPTA V. K. 1999. "A reformulations of Horton laws for large river networks in terms of statistical self-similarity". Water Resources Research, Vol. 35, N° 9, pp. 2763-2777.

Rodríguez Gomes M. H. y Chaudhry F. H. 2000. "Análise fractal de redes de drenagem de bacias hidrográficas". XIII Simposio Brasileiro de Recursos Hídricos.

Rodríguez Iturbe I., Valdez J., Devoto G. y Fiallo Y. 1980. "La estructura geomorfológica de la respuesta hidrológica de una cuenca". Universidad Simón Bolivar.

Rosso R., Bachi B. y La Barbera P. 1991. "Fractal Relation of Mainstrearm Length to Catchment Area in River Networks". Water Resources Research, Vol. 27, N° 3, pp. 381-387.

Vich A. I. 1996. "Aguas continentales – Formas y Procesos". Mendoza. 199 p.

Zucarelli G. y Morresi M. 2000. "Geomorfología cuantitativa de la cuenca del arroyo Feliciano, Entre Ríos, Argentina". Revista del CURIHAM. Vol. 6, pp. 36-46.

Artículo recibido el 05/2007 y aprobado para su publicación el 12/2009.