

## TRATAMIENTO DEL FRENTE ABRUPTO DE INFILTRACIÓN PARA EL CASO DE PROFUNDIDAD DE INUNDACIÓN VARIABLE. SOLUCIONES IMPLÍCITA Y EXPLÍCITA

Sergio Masuelli<sup>(1)</sup> y Daniel Barrera<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>Instituto de Altos Estudios Espaciales “Mario Gulich”, CETT/CONAE  
Ruta C45, Km 8, CP 5187. Falda del Carmen. Córdoba

<sup>(2)</sup>CONICET/Departamento de Ingeniería Agrícola y Uso de la Tierra. Facultad de Agronomía. UBA  
e-mail: Daniel.barrera@fibertel.com.ar

### RESUMEN

La formulación teórica del proceso de infiltración según el modelo de frente abrupto (Green-Ampt) se ha extendido a condiciones de profundidad de anegamiento decreciente en un sistema aislado. Las ecuaciones implícitas obtenidas relacionan la tasa de infiltración y el espesor del anegamiento al tiempo. Mediante la definición de variables adimensionales de profundidad de inundación  $s$  y tiempo  $x$  se obtuvo la ecuación  $ds/dx$ , la cual es función de un único parámetro descriptivo  $\gamma$ , en el cual se combinan todas las variables que caracterizan las condiciones dinámicas iniciales del proceso de infiltración; éste parámetro define la forma de la curva de infiltración dada por la ecuación adimensional hallada. Luego se obtuvo una función paramétrica explícita  $s(x)$ , la cual depende de un único parámetro  $a$ , el cual a su vez es función de  $\gamma$ . Dicho parámetro posee cuatro coeficientes constantes válidos para un rango amplio de propiedades y condiciones del suelo que se observan en la naturaleza. Mediante simulaciones numéricas se demostró que la función paramétrica propuesta genera tasas de infiltración y volúmenes infiltrados similares a los que se obtienen partiendo de la ecuación de Darcy en el esquema de Green-Ampt.

**Palabras clave:** Frente de mojado de Green-Ampt, profundidad de anegamiento variable, variables adimensionales.

### ABSTRACT

The “sharp wetting front” infiltration model has been developed for conditions of decreasing ponding depth in an isolated system. The implicit dimensionless equations obtained relate the infiltration rate and the flooding depth to time. By defining dimensionless variables of flooding depth  $s$  and time  $x$  the equation  $ds/dx$  was obtained, which is a function of only one descriptive parameter  $\gamma$ ; in it, all the variables describing the initial dynamic conditions are included. This parameter determines the shape of the curve given by the dimensionless infiltration equation combining the variables  $s$  and  $x$ . Afterwards a parametric explicit expression  $s(x)$  depending on one parameter  $a$  has been obtained;  $a$  in turn depends on  $\gamma$  and has four generic constant coefficients valid for a wide range of physical soil properties and conditions occurring in nature. By means of numeric simulations using a wide range of values for the soil parameters and different initial flooding depths, it is proved that the proposed explicit parametric function generates similar infiltration rates and cumulative storages to those that are obtained starting from Darcy’s equation in the extended Green-Ampt scheme.

**Keywords:** Green-Ampt wetting front scheme, variable ponding depth, dimensionless variables.

## INTRODUCCIÓN

Las experiencias en laboratorio han comprobado que la infiltración en un suelo no saturado es alta al principio del proceso y luego declina gradualmente con el tiempo. Hay excepciones a este patrón general debidas, por ejemplo, a la rotura de costras en la superficie del terreno o a la disminución de la hidrofobia en algunas clases de suelos; estas situaciones especiales no son tratadas en este trabajo.

La tasa de infiltración expresa la velocidad de penetración del agua a través de la superficie del suelo; si ésta se encharca, la infiltración ocurre a su tasa potencial o máxima posible. La mayoría de las ecuaciones de infiltración describen la evolución temporal de dicha tasa.

Green y Ampt (1911) propusieron un modelo simplificado del proceso de infiltración que contiene una física realista y a la vez permite obtener una solución analítica. Proveyeron así la primera ecuación basada físicamente que describe la infiltración del agua en el suelo. Introdujeron el concepto de “frente abrupto de mojado” como una superficie frontal horizontal que avanza hacia abajo dejando tras de sí una franja de suelo ya mojada, con tenor de humedad uniforme en la vertical y constante en el tiempo, a saturación o a un valor muy cercano a ésta; por debajo del frente el suelo permanece con un tenor volumétrico de humedad uniforme e igual a la humedad inicial  $\theta_i$ ; esta suposición implica que no existe difusión de humedad (Philip, 1957). El frente de mojado es una frontera plana y abrupta donde existe una discontinuidad en el perfil vertical de humedad y de la succión capilar; ésta también permanece constante en el frente de mojado, independientemente de la posición del mismo y del tiempo transcurrido; este esquema da resultados satisfactorios cuando el suelo está inicialmente seco, y en particular en los suelos de textura gruesa, los cuales exhiben un frente de mojado abrupto (Hillel, 1971). Se asume además que en todo el perfil de suelo la porosidad y la conductividad hidráulica son uniformes (Morel-Seytoux y Khanji, 1974).

A fin de simplificar el desarrollo teórico, Green y Ampt limitaron su análisis al caso en que la contribución del potencial hidrostático puede despreciarse (Eagleson, 1970); esto ocurre si la capa de anegamiento es mucho menor en valor absoluto que el nivel de potencial capilar, lo cual se

cumple sólo si la capa inundante es menor que 1cm. Con estas suposiciones obtuvieron una ecuación implícita del volumen total infiltrado  $F$  en función del tiempo; esta ecuación es no lineal en  $F$  y debe ser resuelta por aproximaciones sucesivas o por métodos iterativos. En el caso especial de intensidad de lluvia constante, conocida y menor que la tasa potencial de infiltración, lo cual implica que no se ha producido el encharcamiento, se obtiene una ecuación explícita para  $F$  que permite calcularla directamente (Smith y Parlange, 1978).

El modelo de Green-Ampt ha sido objeto de gran desarrollo en física del suelo e hidrología debido a su simplicidad y buen desempeño en gran variedad de problemas. Su solución está de acuerdo con el modelo más general de difusión de Richards (1931). Las ecuaciones implícitas en el tiempo para la tasa de infiltración  $f$  y su valor acumulado  $F$  deben resolverse con un método iterativo, pues las funciones requeridas  $f(t)$  y  $F(t)$  no están disponibles (Warrick et al., 2005). Salvucci y Entekhabi (1994) obtuvieron, por integración de la ecuación de Darcy y un posterior desarrollo en serie de tiempo y truncado, expresiones explícitas para estas dos variables.

El objetivo de este trabajo es obtener una parametrización de la infiltración en el suelo sujeto a anegamiento, que permita generalizar la ecuación de Darcy en el esquema de Green y Ampt para el decrecimiento de la altura de inundación a medida que se infiltra, a partir de cualquier valor inicial. Se trata de obtener una expresión simple y explícita del volumen infiltrado y de la tasa de infiltración en cualquier instante de tiempo, en función del déficit de saturación  $\Delta\theta$  y la conductividad hidráulica del suelo mojado  $K_e$  (Van Genuchten, 1980) para distintas condiciones iniciales de anegamiento y humedad y potencial capilar en el suelo. Se profundiza el desarrollo hecho anteriormente (Masuelli y Barrera, 2010).

## DESCRIPCIÓN TEÓRICA DEL PROCESO DE INFILTRACIÓN EN EL ESQUEMA PROPUESTO

La cantidad  $\Delta\theta$ , dada por la diferencia  $(\eta - \theta)$  entre la porosidad efectiva  $\eta$  y la humedad volumétrica inicial  $\theta$ , expresa el volumen relativo de poros a ser llenado por agua tras el paso del frente de mojado, a menos de una fracción despreciable correspondiente al volumen remanente de aire, pues el frente de

mojado deja tras de sí pequeñas burbujas de aire atrapadas en la matriz porosa. La conductividad efectiva del suelo mojado  $K_e$  también llamada “conductividad hidráulica a re-saturación”, es una fracción de la conductividad  $K$  del suelo saturado, debido a que la presencia de tales burbujas retrasa el movimiento del agua. Según Vieux (2004) usualmente se toma  $K_e=I/2K$ . Al nivel del potencial capilar en el frente de mojado la denominamos  $\psi_f$  y lo expresamos en cm ya que se trata de unidades de energía por unidad de peso. A su valor con signo positivo lo denominamos nivel de succión. Éste favorece el movimiento del agua hacia abajo, hacia la región del suelo con mayor succión debido a su menor contenido de humedad.

Por simplicidad en la notación, en adelante se utiliza  $K$  en lugar de  $K_e$ . Se parte del esquema de Green y Ampt para infiltración (Figura 1) en el que se asume que se trata de un suelo inicialmente subsaturado, con las siguientes características:

1. Suelo incompresible y homogéneo, lo cual implica que  $\eta$  es constante en el tiempo y uniforme en el perfil.
2. Humedad volumétrica inicial  $\theta$  uniforme en todo el perfil. El déficit de saturación  $\Delta\theta$  es constante y uniforme.
3. Potencial capilar en el frente de mojado  $\psi_f$  uniforme en todo el perfil y constante en el tiempo.
4. Conductividad hidráulica efectiva del suelo mojado  $K_e$  uniforme en la vertical y constante en el tiempo.
5. Al comienzo de la infiltración existen una capa acuosa de altura  $h_0$  anegando la superficie y una lámina de suelo mojado contigua a la superficie de espesor infinitesimal, en la cual es válida la ecuación de Darcy, seguida de una franja profunda de suelo no saturado. El esquema también admite la preexistencia de una franja de suelo mojado contigua a la superficie, como si el proceso se hubiera iniciado con anterioridad al instante considerado como inicial.

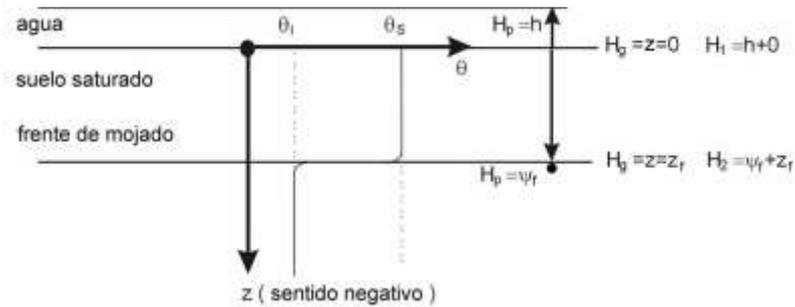


Figura 1. Frente de mojado de Green-Ampt.

Partimos de la ecuación de Darcy en forma similar al desarrollo mostrado por Chow et al. (1994) para el cálculo del movimiento dentro de la aproximación de Green-Ampt, considerando los potenciales de presión hidrostática, de gravedad y de capilaridad. Denominamos  $L$  al espesor de la capa de suelo saturado detrás del frente de mojado, el cual aumenta hacia abajo, y hacemos el cambio de variable  $z_f = -L$ . Asimismo, denominamos  $\psi = -\psi_f$  de tal modo que  $\psi$  es positivo. De esta manera, la caída de potencial al pasar del nivel  $z=0$  (superficie) al nivel  $z=-z_f$  (en el frente de mojado) es:

$$\Delta h = h + L + \psi \quad (1)$$

Entonces la ecuación de Darcy se expresa:

$$\frac{dh}{dt} = -K \frac{\partial h}{\partial z} = -K \left( \frac{h + L + \psi}{L} \right) \quad (2)$$

Consideramos además que:

$$L(0) = 0, \quad h(0) = h_0 \Rightarrow L = \frac{h_0 - h}{\Delta\theta} \quad (3)$$

En este último paso hemos asumido, al igual que Green y Ampt, que la profundidad de agua infiltrada ( $h_0 - h$ ) resulta en que una franja de suelo de profundidad  $L$  ha incrementado su humedad en la cantidad  $\Delta\theta$ , lo cual implica suponer que no existe escurrimiento lateral (ya sea superficial o subsuperficial) ni evapotranspiración.

Si definimos  $\alpha = 1 - \Delta\theta > 0$  y reemplazamos en (2) se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = -K \left( \frac{h_0 - \alpha h + (1 - \alpha)\psi}{h_0 - h} \right) \quad (4)$$

Hemos presentado hasta aquí el desarrollo de Green-Ampt que expresa el proceso de infiltración para un frente de mojado abrupto. A continuación proponemos un nuevo tratamiento de la ecuación (4) que a diferencia del método de Green-Ampt no desprecia la capa acuosa. Por el contrario, permite considerar el proceso con una capa inundante decreciente a medida que se infiltra en un sistema aislado, es decir, sin entradas o salidas laterales ni verticales (sin precipitación ni evapotranspiración); ésta es la innovación principal en el esquema que proponemos.

Definimos la variable adimensional  $s=h/h_0$  que expresa la profundidad de anegamiento  $h$  relativa a su valor inicial. De modo similar hacemos  $\beta=K/h_0$  y  $\chi=1+\psi \Delta\theta/h_0$  y obtenemos:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta \left( \frac{\chi - \alpha s}{1-s} \right) \quad (5)$$

Definimos ahora la variable  $x$  para adimensionalizar el tiempo, y la variable  $\gamma$ :

$$x = \frac{K \cdot \chi}{h_0} \cdot t = K \left( \frac{1}{h_0} + \frac{\Delta\theta \cdot \psi}{h_0^2} \right) t \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{\chi} = \frac{1 - \Delta\theta}{1 + \frac{\Delta\theta \cdot \psi}{h_0}} \quad (7)$$

Al combinar las ecuaciones (5), (6) y (7) obtenemos:

$$\frac{ds}{dx} = - \left( \frac{1-\gamma s}{1-s} \right) \Leftrightarrow dx = -ds \left( \frac{1-s}{1-\gamma s} \right) \quad (8)$$

En la ecuación diferencial obtenida, toda la información referida al tipo de suelo y su condición inicial está condensada en la variable  $\gamma$  y en el re-escalamiento temporal en  $x$ . La variable  $\gamma$  puede tomar valores entre 0 (cuando el potencial capilar es mucho mayor que los otros) y 1 (cuando el suelo está completamente saturado).

Integrando la ecuación (8) obtenemos:

$$x = - \int_1^{h/h_0} ds \frac{1-s}{1-\gamma s} = - \int_1^{h/h_0} \frac{ds}{1-\gamma s} + \int_1^{h/h_0} \frac{s ds}{1-\gamma s}$$

Resolvemos la segunda integral:

$$\int_1^{h/h_0} \frac{s ds}{1-\gamma s} = \int_1^{h/h_0} \frac{ds}{\gamma} \left( \frac{1}{1-\gamma s} - 1 \right) = \frac{1}{\gamma} \left( \int_1^{h/h_0} \frac{ds}{1-\gamma s} - \int_1^{h/h_0} ds \right)$$

Por lo tanto tenemos:

$$x = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \int_1^{h/h_0} \frac{ds}{1-\gamma s} - \frac{1}{\gamma} \int_1^{h/h_0} ds$$

$$x = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln(1-\gamma s) \Big|_1^{h/h_0} - s \Big|_1^{h/h_0} \right)$$

$$x = \frac{1}{\gamma^2} \left( (\gamma-1) \ln(1-\gamma s) - \gamma s \right) \Big|_1^{h/h_0}$$

Obtenemos finalmente:

$$x = \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \left[ \ln \left( \frac{1-\gamma s}{1-\gamma} \right) + \frac{1-s}{\gamma} \right] \quad (9)$$

Esta es la ecuación que se buscaba, pero observamos que no es posible obtener una expresión de  $s(x)$  mediante despejes. Antes de buscar una forma paramétrica para dicha expresión, podemos calcular el  $x$  para el cual  $s=0$ , que corresponde al instante en el cual se acaba el agua en superficie pues toda se ha infiltrado. Llamamos a este valor  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{1-\gamma}{\gamma^2} \ln(1-\gamma) + \frac{1}{\gamma} \quad (10)$$

En la Figura 2 se muestran los valores de  $x_0$  para todos los valores posibles de  $\gamma$ , es decir entre 0 y 1. Según la ecuación (10) el límite inferior de  $\gamma$ , que corresponde a un suelo inicialmente seco, se corresponde con un valor de  $x_0$  igual a 0.5, que es el mínimo tiempo posible en que puede completarse la infiltración. Este valor es igual a la mitad del correspondiente al caso de suelo inicialmente saturado ( $\gamma=1$ ).

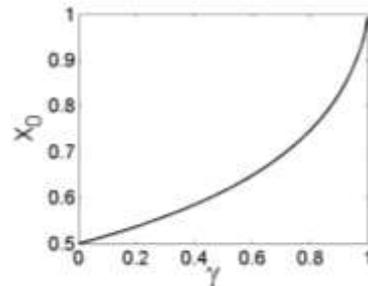


Figura 2. Duración adimensional del proceso de infiltración en función de  $\gamma$ .

Analicemos ahora las características funcionales y el significado físico del parámetro  $\gamma$  (ecuación 7). Es conveniente tratar a  $\gamma$  como función de  $\Delta\theta$  y del cociente de potenciales  $\psi/h_0$ , ya que si éste permanece constante  $\gamma$  es solo función del  $\Delta\theta$  inicial, independientemente de los valores de  $h_0$  y  $\psi$ . La Figura 3 muestra las isolíneas de  $\gamma$  en el plano  $h_0$  vs  $\psi$  para dos condiciones iniciales de humedad: un suelo inicialmente muy seco y otro medianamente húmedo; dichas isolíneas son rectas cuya pendiente es función de  $\Delta\theta$ . Cuanto más seco está el suelo más altos son los valores de  $\gamma$ .

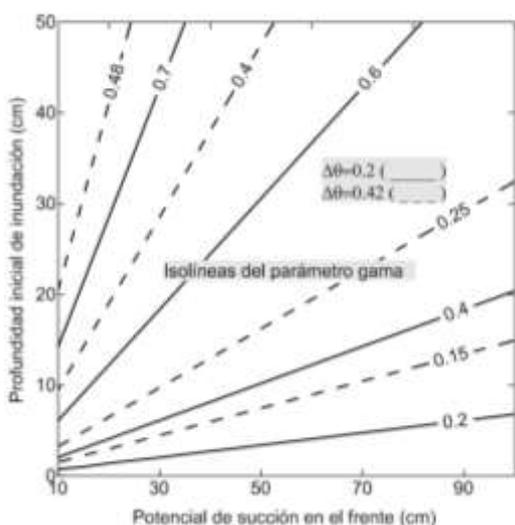


Figura 3. Isolíneas de  $\gamma$  en el plano  $h_0$  vs  $\psi$  para dos condiciones iniciales de humedad: un suelo inicialmente muy seco y otro medianamente húmedo.

En la Figura 4 se muestran las isolíneas de  $\gamma$  en el plano  $\psi/h_0$  vs  $\Delta\theta$ . Se puede observar que para suelos casi saturados el valor de  $\gamma$  es alto, independientemente del cociente  $\psi/h_0$  excepto para valores muy pequeños de éste. En cambio, para suelos secos el valor de  $\gamma$  depende fuertemente de dicho cociente, y solo toma valores mayores que 0.6 para valores del cociente entre potenciales cercanos a la unidad o aún menores, lo cual implica que la capa inicial de inundación debe tener una profundidad apreciable, al menos unos 5 cm en el caso de suelos arenosos y diez veces superior en el caso de arcillas.

En la Figura 5 se muestra la función  $\gamma(h_0)$  para un suelo inicialmente muy seco ( $\Delta\theta=0.42$ ) y en donde el potencial de succión frontal  $\psi$  actúa como parámetro, para dos valores típicos (5 cm y 50 cm) que a ese déficit de saturación tienen los suelos limo-arenoso y arcilloso respectivamente. La

variación en el valor de  $\gamma$ , es más uniforme en todo el rango de alturas iniciales de la capa inundante cuanto mayor es el valor de succión en el frente de mojado, o sea cuanto más fina es la textura del suelo. Ambas curvas tienden asintóticamente al límite superior ( $1-\Delta\theta$ ) cuando la profundidad  $h_0$  tiende a infinito. En el ejemplo de la Figura 5 dicho valor umbral es igual a 0.58.

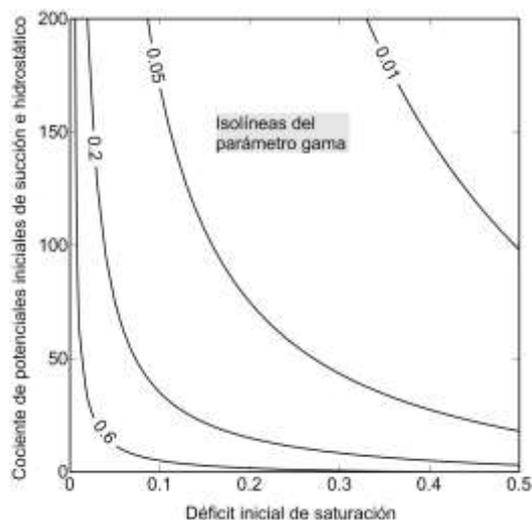


Figura 4. Isolíneas de  $\gamma$  en el plano  $\psi/h_0$  vs  $\Delta\theta$ .

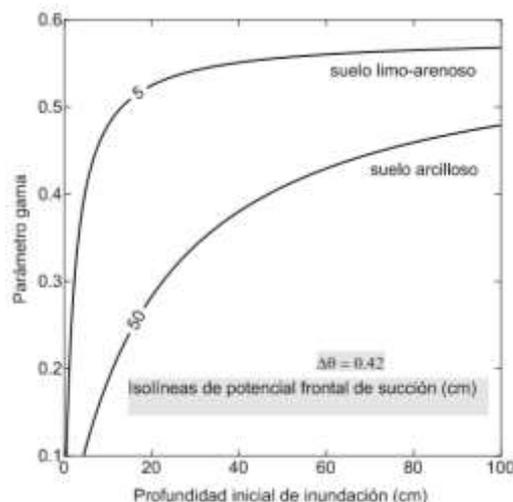


Figura 5.  $\gamma(h_0)$  para un suelo inicialmente muy seco y dos valores de succión típicos de suelos de textura gruesa y fina.

Para comprender mejor el significado físico de  $\gamma$  es conveniente modificar la ecuación (7) y escribir:

$$\gamma = \frac{h_0(1-\Delta\theta)}{h_0 + \Delta\theta \cdot \psi} = \frac{\alpha h_0}{h_0 + \Delta\theta \cdot \psi} \quad (11)$$

En el miembro de la derecha, el numerador es el producto de  $\alpha$  –la fracción de volumen de suelo no disponible para infiltración– por  $h_0$  –la capa de agua a ser infiltrada–. O sea, el numerador expresa el grado de dificultad para que el proceso se complete. A su vez, el denominador contiene en dos términos las condiciones iniciales que favorecen el movimiento del agua hacia abajo:  $h_0$  y  $\psi$ , los potenciales que junto con el gravitatorio aceleran la infiltración, y la fracción de volumen poroso disponible  $\theta$ . Cuanto mayores son estos términos, más rápidamente se completa el proceso. En la expresión de  $\gamma$ , tanto un mayor numerador como un menor denominador causan un retardo en completar la infiltración de la capa de agua inundante. Vemos que  $\gamma$  es un número fundamental adimensional que contiene todas las condiciones iniciales extrínsecas que afectan la dinámica del proceso. Es interesante notar que la conductividad hidráulica, condición intrínseca por ser una propiedad del suelo y el agua y que es el otro factor que afecta el proceso, solo está contenido en el tiempo adimensional  $x$ .

## SOLUCIÓN EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE INFILTRACIÓN

### Obtención de una función paramétrica $s(x)$

Otro caso de interés es  $\gamma \approx 0$ , lo cual se verifica cuando el suelo está muy seco y  $\psi$  es mucho mayor que  $h_0$ . Desarrollando la ecuación (9) en el límite para  $\gamma$  tendiendo a cero tenemos:

$$x = \frac{(1-s)^2}{2} \Leftrightarrow s = 1 - \sqrt{2x} \quad (12)$$

Por otra parte, para  $\gamma \approx 1$  lo cual corresponde a la saturación, desarrollando el primer término de (9) y tomando de la teoría de límites que el límite cuando  $x$  tiende a 0 de  $(x \ln x)$  es 0, tenemos:

$$x = 1-s \Leftrightarrow s = 1-x \quad (13)$$

Para obtener  $s(x)$  dado  $x$  podemos pensar al problema como uno de optimización; la función y su derivada a las cuales hay que hallarle las raíces para cada  $x$  son, a partir de (9):

$$f(s) = \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \ln\left(\frac{1-\gamma s}{1-\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma}(1-s) - x \quad (14)$$

$$f'(s) = \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{1}{1-\gamma s} (-\gamma) - \frac{1}{\gamma} = -\frac{\gamma-1+1-\gamma s}{\gamma(1-\gamma s)} \quad (15)$$

$$f'(s) = \frac{s-1}{1-\gamma s}$$

Se ve que para  $f(s) = 0$  los valores en los extremos son  $(x = 0, s = 1)$  y  $(x = x_0, s = 0)$ . Por lo tanto, si se generan  $N$  puntos distribuidos convenientemente, podemos para cada punto  $x_i$  hallar las raíces  $s_i$  de la ecuación (14) mediante iteraciones. Mediante el método de Newton-Raphson se obtuvieron las curvas  $s(x)$  para distintos valores de  $\gamma$  (de 0,1 a 1 en intervalos de 0,1) que se muestran en la Figura 6; la recta de pendiente unitaria corresponde a la saturación, o sea  $\gamma = 1$ .

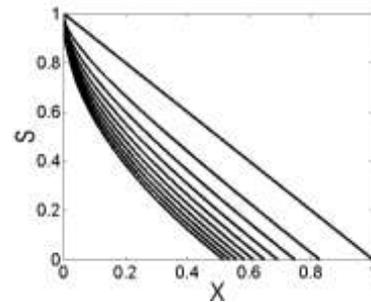


Figura 6.  $s$  vs  $x$  para distintos valores de  $\gamma$ . La recta corresponde a  $\gamma=1$  (suelo saturado) y la curva de la izquierda a  $\gamma=0$  (suelo seco).

El ajuste más obvio sería usar una combinación lineal de las expresiones (12) y (13), que expresan los comportamientos para valores extremos de  $\gamma$ , asignando a ambos términos coeficientes de peso complementarios; pero hemos preferido la siguiente expresión por una cuestión de simplicidad funcional:

$$s(x) = 1 - \left(\frac{x}{b}\right)^a \quad (16)$$

Es de observar que tanto  $a$  como  $b$ , los cuales dependerán de  $\gamma$ , son iguales a  $x_0$  para sus valores extremos. De este análisis surge como natural que el parámetro  $b$  sea directamente igual a  $x_0$  que es la raíz de  $s$  y por lo tanto proponemos la función de ajuste:

$$s(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^a \quad (17)$$

Hemos comprobado que los ajustes son similares a los obtenidos con la combinación lineal mencionada. El parámetro  $a$  fue calculado para distintos valores de  $\gamma$  (21 valores entre 0 y 1) y se verificó que, en

todos los casos y para cualquier valor de  $x$ , el error entre la función original derivada de la ecuación (9) y el ajuste propuesto (ecuación 17) fue de un 7% como máximo. Las mayores discrepancias se hallan para los  $x$  más grandes, lo que habla muy bien de la calidad del ajuste teniendo en cuenta que para esos valores la función está tendiendo a cero y por lo tanto el error relativo para cualquier ajuste en general es muy difícil de controlar.

Dado que, como fuera mencionado,  $x_0$  tiene los mismos valores que  $a$  en los extremos el ajuste el ajuste se realizó para  $x_0-a$  para minimizar los errores. Así, el ajuste de  $a$  versus  $\gamma$  resulta:

$$a(\gamma) = x_0 - \left( \frac{a_1 \gamma + a_2 \gamma^2}{1 + a_3 \gamma + a_4 \gamma^2} \right) \quad (18)$$

con:

$$\begin{cases} a_1 = 0,05339671 \\ a_2 = -0,05339299 \\ a_3 = -1,32447855 \\ a_4 = 0,34984288 \end{cases} \quad (19)$$

En la Figura 7 se muestra cómo ajusta la parametrización obtenida a los valores de  $s(x)$  calculados a partir de (9). El caso que se muestra corresponde a un valor de  $\gamma = 0,3029$ , correspondiente a un suelo tipo arena margosa según la tabla 4.3.1 de Chow et al. (1994), con  $\Delta\theta = 0,4$ ;  $\psi = 6,13\text{cm}$ ; y  $h_0 = 2,5\text{cm}$ .

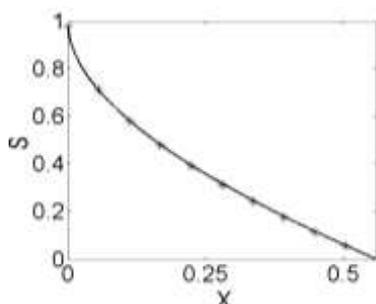


Figura 7. Descenso de la altura de inundación en función del tiempo hasta que la infiltración se completa, expresado en la forma adimensional  $s(x)$ . Ajuste para  $\gamma=0,3029$ . Los puntos son valores de  $s$  calculados a partir de (9); en línea llena valores obtenidos mediante la función paramétrica.

### Validación para diferentes condiciones hidrodinámicas

Para verificar la bondad de la función propuesta se han comparado para distintas situaciones los valores

de  $h$  y de su derivada, obtenidas a partir de la ecuación implícita y por la parametrización.

Previamente se calcularon los valores de  $\gamma$  según (7), para 3 alturas iniciales distintas y 3 tipos de suelo diferentes. Para los déficit de saturación  $\Delta\theta$  se eligieron los valores dados por Chow et. al. (1994) como porosidad efectiva y la mitad de tal valor para: arena magrosa, marga limosa y arcilla limosa. Los resultados mostraron que  $\gamma$  puede tomar cualquier valor entre 0 y 1 para todos los tipos de suelo dependiendo de sus condiciones iniciales.

En la Tabla 1 se muestran para 5 de los casos anteriores (que notamos con la letra N) y 3 tiempos distintos los valores de  $h$  y de su derivada respecto del tiempo, es decir la tasa de infiltración, obtenidos por cálculo directo (ecuación 4) y por la parametrización propuesta.

Llamamos cálculo directo a la resolución numérica de la ecuación (9). Los tiempos fueron elegidos de modo de cubrir las tres regiones de  $s(x)$ , es decir cercano a 0, cercano a  $x_0$  e intermedio. Como puede observarse en la Tabla 1 la función paramétrica es muy satisfactoria para suelos y condiciones iniciales tan diversas. Tal como ya se mencionara anteriormente las mayores discrepancias relativas se observan para tiempos grandes, lo cual implica que el espesor de agua remanente sobre la superficie es muy baja.

Todo el cálculo precedente sirve para calcular la función  $h(t)$  para todo tipo de situaciones, pero partiendo de la condición de que no hay una franja saturada en el subsuelo contigua a la superficie. Si éste fuera el caso habría que calcular primero  $h_0$ , luego  $s$  y  $x$  correspondientes al tiempo inicial usando la ecuación (9).

### CONCLUSIONES

En el marco del estudio de las transferencias de masa implicadas en el balance hidrológico en la superficie del suelo, se avanzó en la formulación teórica del proceso de infiltración. Se ha logrado extender la formulación teórica del proceso de infiltración en el suelo según el modelo de “frente abrupto de mojado” de Green-Ampt, al caso de profundidad decreciente de la capa de agua que anega el suelo. Esta situación ocurre con cierta frecuencia en las depresiones del terreno luego de una lluvia intensa. En las grandes llanuras, como en el caso de las llanuras pampeana y chaqueña, las depresiones inundadas suelen ser de

gran extensión debido a la baja pendiente general del terreno. En estas condiciones, la capa inundante va disminuyendo su profundidad o altura a medida que el agua se infiltra.

**Tabla 1. Comparación entre las alturas  $h$  y la tasa de infiltración para distintos casos (N) según el cálculo directo aplicando Darcy (ecuación 3) y a partir de la parametrización obtenida.**

Caso	Tiempo [h]	$h$ Darcy [mm]	$h$ Param [mm]	Error %	$dh/dt$ Darcy [mm/h]	$dh/dt$ Param [mm/h]	Error %
1	0,00013	0,69	0,69	0,04	-2394,7	-2397,9	0,13
1	0,00065	0,29	0,29	-0,11	-1076,3	-1077,0	0,07
1	0,00120	0,05	0,05	-0,22	-805,5	-804,0	-0,19
5	0,01500	7,15	7,19	0,64	-176,3	-180,0	2,09
5	0,07500	3,23	3,18	-1,59	-86,6	-87,5	1,07
5	0,13500	0,58	0,56	-3,36	-69,2	-67,2	-2,83
9	0,84970	70,7	71,1	0,49	-32,5	-33,0	1,64
9	4,24840	31,6	31,2	-1,28	-15,6	-15,7	0,85
9	7,64710	5,67	5,52	-2,68	-12,3	-12,0	-2,26
13	0,00160	0,68	0,68	0,01	-196,6	-196,7	0,03
13	0,00800	0,29	0,29	-0,02	-88,0	-88,0	0,01
13	0,01440	0,05	0,05	-0,04	-65,7	-65,6	-0,04
18	12,3609	73,0	73,7	0,93	-2,0	-2,0	2,88
18	61,8046	33,8	33,1	-2,10	-1,0	-1,0	1,47
18	111,248	6,20	5,92	-4,47	-0,8	-0,8	-3,80

El desarrollo teórico presentado constituye un avance significativo con respecto a la ecuación derivada por Philip (1992), la cual está expresada en forma dimensional y depende de los cuatro parámetros trabajados aquí: conductividad hidráulica; succión capilar en el frente de mojado; déficit de humedad volumétrica inicial; y profundidad de anegamiento. En nuestra formulación se describe el mismo proceso con una ecuación adimensional en espacio y tiempo, la cual contiene un único parámetro descriptivo  $\gamma$  que engloba las condiciones dinámicas iniciales.

Proponemos denominar a  $\gamma$  “parámetro de retardo de la infiltración”. En él se combinan todos los parámetros que caracterizan las condiciones dinámicas iniciales del proceso de infiltración; éste parámetro expresa el grado de dificultad que el proceso de infiltración tendrá para un suelo dado en función de las condiciones iniciales, y define la forma de la curva de infiltración.

A su vez, la conductividad hidráulica  $K$ , que caracteriza las propiedades hidráulicas intrínsecas del suelo y el fluido, aparece solamente en la expresión adimensional del tiempo, como un parámetro que caracteriza la expansión o contracción del tiempo adimensionalizado  $x$ . De esta forma se demostró que la conductividad hidráulica no tiene influencia en la forma de la curva de infiltración, la cual queda determinada por el parámetro  $\gamma$ .

Adicionalmente, la ecuación implícita obtenida  $x(s)$  permite derivar el tiempo transcurrido  $x_0$  hasta que la capa de agua sobre el suelo se infiltra totalmente; en esta ecuación,  $x_0$  depende sólo del parámetro  $\gamma$ , mostrando la funcionalidad que relaciona ambas variables. Philip (1992) obtuvo una ecuación equivalente pero más compleja en la cual el tiempo que corresponde a  $x_0$  depende de los cuatro parámetros incluidos en  $\gamma$  y  $x$ .

Por otra parte, hemos propuesto una solución paramétrica explícita  $s(x)$  para aproximar la solución de la ecuación implícita obtenida que describe el proceso de infiltración. Se ha mostrado que la solución propuesta se ajusta bien a la solución de la ecuación implícita que se obtiene por métodos numéricos, para una gama amplia de valores de los parámetros  $K$ ,  $\psi$ ,  $\Delta\theta$  y  $h_0$  que cubren las condiciones presentes en la naturaleza. La ecuación obtenida  $s(x)$  depende únicamente del parámetro descriptivo  $\gamma$ .

Además, se ha mostrado el papel clave de las relaciones  $K/h_0$  y  $(\psi \Delta\theta/h_0)$  para expresar el tiempo como una variable adimensional.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo tuvo el apoyo institucional de la Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE), el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y la Universidad

de Buenos Aires, y se financió parcialmente con fondos del proyecto UBACYT G036.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chow, V.T., Maidment, D.R. y Mays, L.W. 1994. Hidrología aplicada. McGraw-Hill Interamericana, Bogotá.
- Eagleson, P.S. 1970. Dynamic Hydrology. McGraw-Hill, New York.
- Green, W.H. y Ampt, G.A. 1911. Studies on soil physics. 1. The flow of air and water through soils. Journal of Agricultural Soils, 4, 1-24.
- Hillel, D. 1971. Soil and Water. Academic Press, New York.
- Masuelli, S. y Barrera, D., 2010. Una extensión del modelo de Green-Ampt a condiciones de inundación de profundidad variable en llanuras, con solución paramétrica. En: Varni M., Entraigas I. y Vives L. (eds) Hacia la Gestión Integral de los Recursos Hídricos en Zonas de Llanura, 287-293.
- Morel-Seytoux, H.J. y Khanji, J. 1974. Derivation of an equation of infiltration. Water Resources Research, 10, 795-800.
- Philip, J.R. 1957. The theory of infiltration. 1: The infiltration equation and its solution. Soil Science, 83, 345-357.
- Philip, J.R. 1992. Falling head ponded infiltration. Water Resources Research, 28, 2147-2148.
- Richards, L. A. 1931. Capillary conduction of liquids through porous mediums. Physics, 1, 318-333.
- Salvucci, G.D. y Entekhabi, D. 1994. Explicit expressions for Green-Ampt (delta function diffusivity) infiltration rate and cumulative storage. Water Resources Research, 30, 2661-2663.
- Smith, R.E. y Parlange, J.Y. 1978. A parameter-efficient infiltration model. Water Resources Research, 14, 533-538.
- Van Genuchten, M. Th. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society of America Journal, 44, 892-898.
- Vieux, B.E. 2004. Distributed hydrologic modeling using GIS. Kluwer Academic Press, Dordrecht.
- Warrick, A. W., D. Zerihun, C. A. Sanchez y A. Furman 2005. Infiltration under Variable Ponding Depths of Water. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 131(4), 358-363.

*Artículo recibido el 11/2010 y aprobado para su publicación el 12/2010.*